JANEZ ŽIBERT

Matematične osnove biofizike:
Zbirka vaj z rešitvami

Univerza *v Ljubljani*
Zdravstvena fakulteta

NASLOV: MATEMATIČNE OSNOVE BIOFIZIKE - Zbirka vaj z rešitvami

AVTOR: dr. Janez Žibert

OBLIKOVANJE: dr. Janez Žibert

IZDALA:
Univerza v Ljubljani, Zdravstvena fakulteta, Zdravstvena pot 5, Ljubljana

ELEKTRONSKA IZDAJA

CIP - Katiložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)(0.034.2)

ŽIBERT, Janez
Matematične osnove biofizike. Zbirka vaj z rešitvami [Elektronski vir] / Janez Žibert. - Elektronska izd. - El. knjiga. - Ljubljana : Zdravstvena fakulteta, 2016

Način dostopa (URL):
http://www2.zf.uni-lj.si/images/stories/datoteke/Zalozba/Matematicne_osnove_biofizike_Vaje.pdf

ISBN 978-961-6808-61-3 (pdf)

283301632

Ljubljana, januar 2016

Predgovor

Zbirka rešenih vaj je nastala iz vaj, ki jih rešujemo pri matematičnih osnovah biofizike v okviru predavanj pri predmetih Biofizika in Biofizika z biomehaniko na prvi stopnji študijskih programov Fizioterapija, Radiološka tehnologija, Ortotika in protetika ter Laboratorijska zobna protetika na Zdravstveni fakulteti na Univerzi v Ljubljani.

Uvodna predavanja matematike na Zdravstveni fakulteti so namenjena predvsem ponovitvi srednješolske matematike s poudarkom na znanjih, ki so potrebna za nemoteno spremljanje vsebin Biofizike in ostalih predmetov, ki zahtevajo osnovno znanje matematike. Zbirka rešenih vaj dopolnjuje učbenik Matematične osnove biofizike, ki ga uporabljamo pri teh predavanjih, in je namenjena študentom Zdravstvene fakultete, da si lahko pomagajo pri spremljanju vaj, ki jih izvajamo v okviru matematičnih predavanj.

Zbirka vsebuje 20 primerov rešenih nalog s področij elementarnih matematičnih funkcij, odvodov in integralov ter vektorske algebre. Naloge, ki so zbrane v zbirki, izhajajo iz primerov iz biomehanike in biofizike ter radiološke tehnologije.

Knjiga je izvedena s pomočjo urejevalnika besedil *LaTeX*, velika večina grafov funkcij pa je bila narejena s programskim paketom *Mathematica, ver. 8*.

Ljubljana, januar 2016 Janez Žibert

Kazalo

1 Elementarne matematične funkcije

1.1 Osnovne lastnosti funkcij

Analiziraj funkcijo

$$f(x) = |x| - |x-1| + |x-2|$$

1. Nariši funkcijo $f(x)$.
2. Določi ekstremne točke ter intervale naraščanja in padanja funkcije $f(x)$.
3. Napiši funkcijo $f(x)$ v vejnati obliki.

Rešitev:

Najprej bomo napisali funkcijo v vejnati oblik, da bomo potem lahko funkcijo narisali in ocenili ekstremne točke ter intervale naraščanja in padanja.

Ker velja, da je

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

moramo gledati pri katerih x so vrednosti $|x|$, $|x-1|$ in $|x-2|$ pozitivne ali pa negativne.

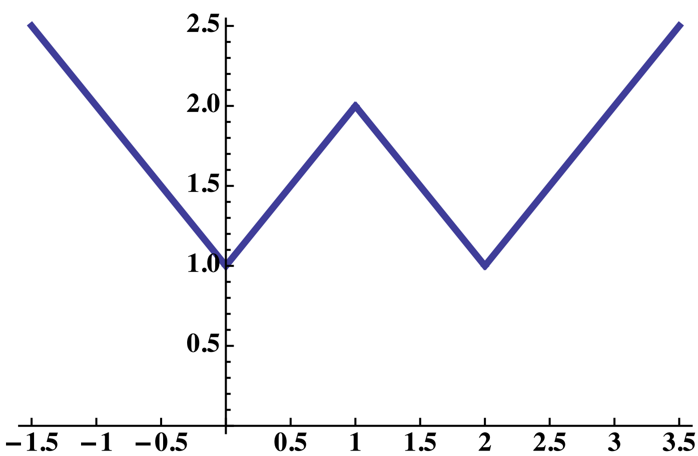
Poglejmo vse možnosti:

$$\begin{array}{lcl} x < 0 & : & f(x) = -x + (x-1) - (x-2) = -x + 1 \\ 0 \leq x \leq 1 & : & f(x) = x + (x-1) - (x-2) = x + 1 \\ 1 \leq x \leq 2 & : & f(x) = x - (x-1) - (x-2) = -x + 3 \\ x > 2 & : & f(x) = x - (x-1) + (x-2) = x - 1 \end{array}$$

Tako lahko zapišemo $f(x)$ v vejnati obliki:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+3, & 1 \leq x \leq 2 \\ x-1, & x > 2 \end{cases}$$

Izrišemo funkcijo in dobimo:



Ekstremne točke in intervale naraščanja in padanja lahko preberemo iz grafa. Minimum funkcije je dosežen pri $x = 0$ in $x = 2$, maksimum pa pri $x = 1$. Intervali naraščanja so $[0, 1]$ in $[2, \infty)$, intervali padanja pa $(-\infty, 0]$ in $[1, 2]$.

1.2 Reševanje sistema linearnih enačb

1. V bolnišnici so kupili paket zdravil, v katerem sta bila dva tipa zdravil. Zdravila so bila pakirana po škatlicah. V paketu je bilo 186 škatlic zdravil. Škatlica prvega zdravila stane 16 EUR, škatlica drugega zdravila pa 12 EUR. Za paket so plačali 2460 EUR. Koliko škatlic prvega in koliko škatlic drugega zdravila je v paketu?

2. Medicinska sestra mora pripraviti iz zdravila z 18% učinkovino in iz zdravila s 45% učinkovino 16 ml zdravila s 36% učinkovino. Koliko zdravila z 18% učinkovino in koliko zdravila s 45% učinkovino mora zmešati skupaj?

3. V bolnišnici A je dvakrat več pacientov kot v bolnišnici B. Bolnišnica C ima 280 več pacientov, kot jih je v bolnišnici A. Vse skupaj je v teh bolnišnicah 2720 pacientov. Koliko je pacientov v vsaki bolnišnici?

Rešitev:

1. Nastavimo sistem enačb iz teksta prve naloge. Najprej pripravimo tabelo količin, ki nastopajo pri tej nalogi:

	količina	cena
zdravilo1	x	16
zdravilo2	y	12
skupaj	186	2460

Iz zgornje tabele sestavimo sistem enačb:

$$
\begin{array}{rl}
x + y = 186 & / \cdot 12 \\
16x + 12y = 2460 & \\
------------ & -------------- \\
12x + 12y = 2232 & \\
16x + 12y = 2460 & \text{enačbi odštejemo} \\
------------ & -------------- \\
-4x = -228 & \Longrightarrow x = \frac{228}{4} = 57 \\
------------ & -------------- \\
x \text{ vstavimo v prvo enačbo} & \text{in rešimo še za } y \\
57 + y = 186 & \Longrightarrow y = 186 - 57 = 129
\end{array}
$$

V paketu je 57 škatlic prvega in 129 škatlic drugega zdravila.

2. Nastavimo sistem enačb iz teksta druge naloge. Pripravimo tabelo količin, ki nastopajo pri tej nalogi:

	učinkovina	količina
zdravilo1	18%	x
zdravilo2	45%	y
skupaj	36%	16

Iz tabele sestavimo sistem enačb:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 16 && / \cdot 0.45 \\
0.18x + 0.45y &= 0.36 \cdot 16 = 5.76 \\
&\text{-----------} && \text{-------------} \\
0.45x + 0.45y &= 7.2 \\
0.18x + 0.45y &= 5.76 && \text{enačbi odštejemo} \\
&\text{-----------} && \text{-------------} \\
0.27x = 1.44 &\Longrightarrow && x = 5.33 \\
&\text{-----------} && \text{-------------} \\
x \text{ vstavimo v prvo enačbo} & && \text{in rešimo še za } y \\
5.33 + y = 16 &\Longrightarrow && y = 10.66
\end{aligned}
$$

Zmešati moramo 5.33 ml prvega in 10.66 ml drugega zdravila, da dobimo 16 ml zdravila s 36% učinkovino.

3. Pripravimo tabelo količin, ki nastopajo pri tretji nalogi:

	pacienti
bolnišnica A	x
bolnišnica B	y
bolnišnica C	z
skupaj	2720

Iz tabele in teksta naloge sestavimo sistem enačb:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 2720 \\
x &= 2y \\
z &= x + 280
\end{aligned}
$$

Ker so enačbe preproste bi lahko iz druge in tretje enačbe izrazili y in z s spremenljivko x in vse skupaj vstavili v prvo enačbo ter tako dobili rešitev za x. Mi pa bomo delali po standardnem postopku reševanja sistemov treh enačb s tremi neznankami:

$$
\begin{array}{rcl}
x + y + z = 2720 & & \\
x - 2y = 0 & & \text{enačbo odštejemo od prve, da se znebimo } x \\
-x + z = 280 & & \text{enačbo prištejemo prvi enačbi, da se znebimo } x \\
--------- & - & ----------- \\
x + y + z = 2720 & & \\
3y + z = 2720 & & \text{enačbo pomnožimo z 2} \\
y + 2z = 3000 & & \\
--------- & - & ----------- \\
x + y + z = 2720 & & \\
6y + 2z = 5440 & & \\
y + 2z = 3000 & & \text{enačbo odštejemo od druge enačbe, da se znebimo } z \\
--------- & - & ----------- \\
x + y + z = 2720 & & \\
6y + 2z = 5440 & & \\
5y = 2440 & & \rightarrow y = 488 \\
--------- & - & ----------- \\
6 \cdot 488 + 2z = 5440 & & \rightarrow z = \dfrac{2512}{2} = 1256 \\
--------- & - & ----------- \\
x + 488 + 1256 = 2720 & & \rightarrow x = 976
\end{array}
$$

V prvi bolnišnici je 976 pacientov, v drugi bolnišnici imamo 488 pacientov, v tretji pa 1256 pacientov.

1.3 Model prehajanja rtg. sevanja skozi snov

1. Model prehajanja sevanja skozi snov ima obliko

$$I = I_0 e^{-kt},$$

kjer je I_0 vstopna jakost sevanja, I izstopna jakost sevanja, t debelina snovi, skozi katero prehaja sevanje, in k koeficient oslabitve sevanja pri prehajanju skozi snov.

Skozi kakšno debelino mora prehajati sevanje, da jakost sevanja pade na polovico vstopne jakosti sevanja, v primeru ko je $k = \frac{1}{4}$?

2. Če sevanje prehaja v eni smeri skozi dve različni snovi različnih debelin, lahko model prehajanja skozi obe snovi zapišemo kot

$$I = I_0 e^{-k_1 t_1} e^{-k_2 t_2} = I_0 e^{-(k_1 t_1 + k_2 t_2)},$$

kjer predstavljata k_1 in k_2 koeficienta oslabitve sevanja v snovi 1 in 2 ter t_1 in t_2 debelini snovi.

Izračunaj vrednosti oslabitvenih koeficientov k_1 in k_2, če izvajamo dva poskusa. V prvem poskusu merimo izstopno sevanje v primeru, ko imamo prvo snov debeline $t_1 = 2$ in drugo $t_2 = 3$. V tem primeru ob vstopni jakosti sevanja $I_0 = 50$ izmerimo izstopno jakost $I = 25$. V drugem poskusu, pa imamo prvo snov debeline $t_1 = 4$ in drugo snov debeline $t_2 = 1$, vstopno jakost $I_0 = 50$ in izmerjeno izstopno jakost $I = 20$.

Rešitev:

1. V prvem primeru imamo znane naslednje količine: $k = \frac{1}{4}$, $I = \frac{I_0}{2}$, izračunati moramo debelino t.

$$\begin{aligned}
I &= I_0 e^{-kt} \\
\frac{I_0}{2} &= I_0 e^{-\frac{1}{4}t} \\
\frac{1}{2} &= e^{-\frac{1}{4}t} \qquad /\ln() \\
\ln(\frac{1}{2}) &= -\frac{1}{4}t \\
t &= \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{4}} = 4\ln(2) = 2.77
\end{aligned}$$

2. Druga naloga prikazuje postopek, kako se določa oslabitvene koeficiente več snovi skupaj, če poznamo debeline snovi. To je običajen postopek pri določanju oslabitvenih koeficientov rtg. sevanja pri različnih snoveh. Imamo torej dva poskusa, v prvem imamo naslednje podatke

$I_0 = 50$, $I = 25$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, v drugem pa $I_0 = 50$, $I = 20$, $t_1 = 4$, $t_2 = 1$. V obeh primerih izpišimo modela prehajanja rtg. sevanja skozi dve snovi:

$$
\begin{array}{rcl}
25 & = & 50e^{-(k_1 2 + k_2 3)} \\
20 & = & 50e^{-(k_1 4 + k_2 1)} \\
- - - - - - - - - - & - & - - - - - - - - - - - - - \\
\frac{1}{2} & = & e^{-(k_1 2 + k_2 3)} \\
\frac{2}{5} & = & e^{-(k_1 4 + k_2 1)} \\
- - - - - - - - - - & - & - - - - - - - - - - - - - \\
 & & \text{obe enačbi logaritmiramo z } \ln \\
- - - - - - - - - - & - & - - - - - - - - - - - - - \\
\ln(\frac{1}{2}) & = & -2k_1 - 3k_2 \quad \text{pomnožimo z 2 in enačbi odštejemo} \\
\ln(\frac{2}{5}) & = & -4k_1 - k_2 \\
- - - - - - - - - - & - & - - - - - - - - - - - - - \\
2\ln(\frac{1}{2}) - \ln(\frac{2}{5}) & = & -5k_2 \quad \rightarrow \quad k_2 = \dfrac{2\ln(\frac{1}{2}) - \ln(\frac{2}{5})}{-5} = 0.094 \\
- - - - - - - - - - & - & - - - - - - - - - - - - - \\
\ln(\frac{1}{2}) & = & -2k_1 - 3k_2 \quad \rightarrow \quad k_1 = \dfrac{\ln\frac{1}{2} + 3k_2}{-2} = 0.21
\end{array}
$$

1.4 Razpolovni čas

Model razpadanja radioaktivnih izotopov, ki se jih uporablja v nuklearni medicini, lahko zapišemo kot:

$$A = A_0 2^{-t/T},$$

kjer je A_0 začetna stopnja radioaktivnosti ob času $t = 0$, A stopnja radioaktivnosti ob času t in T razpolovni čas radioaktivnega izotopa.

Denimo, da v nuklearni medicini za preiskavo uporabljamo radiofarmak jodin-131, kjer imamo podatek, da je pričakovana stopnja radioaktivnosti po 8 dnevih 370 enot (stopnjo radioaktivnosti se v tem primeru meri z Bekereli, Bq). Poznamo pa tudi razpolovni čas tega radiofarmaka, ki je 4 dni.

a) Kolikšna je stopnja radioaktivnosti radiofarmaka ob dnevu proizvodnje?

b) Čez koliko dni bo stopnja radioaktivnosti radiofarmaka padla na 74 enot?

Rešitev:

a) Podatki za naš model so naslednji: $A = 370$, $T = 4$, $t = 8$, izračunati moramo A_0.

$$\begin{aligned} A &= A_0 2^{-t/T} \\ 370 &= A_0 2^{-8/4} = A_0 2^{-2} = A_0 \frac{1}{4} \\ A_0 &= 4 \cdot 370 = 1480 \end{aligned}$$

Začetno stopnjo radioaktivnosti A_0 potrebujemo za reševanje drugega dela naloge.

b) Podatki za naš model v tem primeru so naslednji: $A = 74$, $T = 4$, začetno stopnjo pa smo ocenili iz prejšnje naloge, $A_0 = 1480$, izračunati moramo čas t:

$$\begin{aligned} A &= A_0 2^{-t/T} \\ 74 &= 1480 \cdot 2^{-t/4} \\ \frac{1}{20} &= 2^{-t/4} \quad \text{logaritmirjamo obe strani enačbe z } \ln \\ \ln(\frac{1}{20}) &= -\frac{1}{4} t \ln(2) \\ -\ln(20) &= -\frac{1}{4} t \ln(2) \\ t &= \frac{4\ln(20)}{\ln(2)} = 17.3 \end{aligned}$$

Stopnja radioaktivnosti radiofarmaka bo padla na 74 Bq čez približno 17 dni.

1.5 Izris kotne funkcije

Obravnavajmo funkcijo:

$$f(t) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2})$$

1. Nariši funkcijo $f(t)$.
2. Za kateri t je funkcija $f(t)$ enaka 1 na intervalu $[-3, 3]$.

Rešitev:

1. Funkcijo bomo izrisali tako, da bomo najprej izračunali ničle, maksimume in minimume sinusne funkcije in potem skozi te točke izrisali sinusno funkcijo.

   Poiščimo **ničle funkcije** $f(t)$.
   Vprašamo se, za katere x je $\sin(x) = 0$. To velja za $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   To pomeni, da mora biti v našem primeru $x = \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2} = k\pi$. Rešimo to enačbo in dobili bomo, za katere t to velja.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2} &= k\pi \qquad / : \pi \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{2} &= k \qquad / \cdot 6 \\ 2t - 3 &= 6k \\ 2t &= 6k + 3 \\ t &= \frac{3}{2} + 3k \end{aligned}$$

   Izračunajmo nekaj ničel pri različnih k: $k = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$, $k = 1 \Rightarrow t = \frac{9}{2}$, $k = -1 \Rightarrow t = -\frac{3}{2}$, ...

   Poiščimo še **maksimume funkcije** $f(t)$.
   Vemo, da je maksimum sinusne funkcije enak 1. Vprašamo se, za katere x je $\sin(x) = 1$. To velja za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   To pomeni, da mora biti v našem primeru $x = \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Rešimo to enačbo in dobili bomo, za katere t to velja.

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad / : \pi \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} + 2k \qquad / \cdot 6 \\ 2t - 3 &= 3 + 12k \\ 2t &= 6 + 12k \\ t &= 3 + 6k \end{aligned}$$

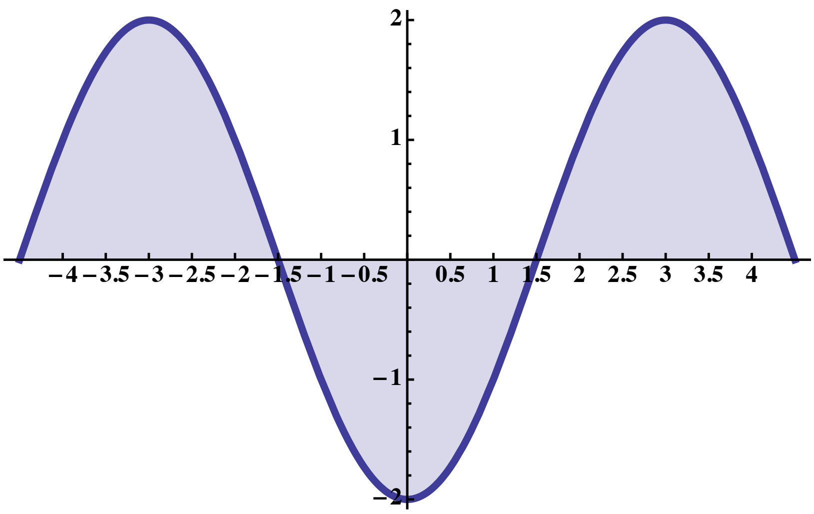
Izračunajmo nekaj maksimumov pri različnih k: $k = 0 \Rightarrow t = 3$, $k = 1 \Rightarrow t = 9$, $k = -1 \Rightarrow t = -3$, ...

Poiščimo še **minimume funkcije** $f(t)$.
Vemo, da je minimum sinusne funkcije enak -1. Vprašamo se, za katere x je $\sin(x) = -1$. To velja za $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
To pomeni, da mora biti v našem primeru $x = \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Rešimo to enačbo in dobili bomo, za katere t to velja.

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2} &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad / : \pi \\
\frac{1}{3}t - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2} + 2k \qquad / \cdot 6 \\
2t - 3 &= -3 + 12k \\
2t &= 12k \\
t &= 6k
\end{aligned}
$$

Izračunajmo nekaj minimumov pri različnih k: $k = 0 \Rightarrow t = 0$, $k = 1 \Rightarrow t = 6$, $k = -1 \Rightarrow t = -6$, ...

Sedaj pa izrišimo sinusno funkcijo, ki gre skozi te točke in ima amplitudo 2:



2. Rešimo še, za katere t je funkcija $f(t)$ enaka 1 na intervalu $[-3, 3]$.

   To pomeni, da mora veljati

$$
\begin{aligned}
2\sin(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}) &= 1 \\
\sin(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

   Torej vprašati se moramo, kdaj je $\sin(x) = \frac{1}{2}$. To velja v primeru, ko je $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ in ko je $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$. Tako bomo iskali rešitve pri dveh možnostih:

- $$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad / : \pi \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{2} &= \frac{1}{6} + 2k \qquad / \cdot 6 \\ 2t - 3 &= 1 + 12k \\ 2t &= 4 + 12k \\ t &= 2 + 6k \end{aligned}$$

  Poglejmo še nekaj možnosti za t pri različnih izbirah k:
  $k = 0 \Rightarrow t = 2$, $k = 1 \Rightarrow t = 8$, $k = -1 \Rightarrow t = -4$, ...
  Edina rešitev ki leži na intervalu $[-3, 3]$ je $t = 2$.

- $$\begin{aligned} \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{2} &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad / : \pi \\ \frac{1}{3}t - \frac{1}{2} &= \frac{5}{6} + 2k \qquad / \cdot 6 \\ 2t - 3 &= 5 + 12k \\ 2t &= 8 + 12k \\ t &= 4 + 6k \end{aligned}$$

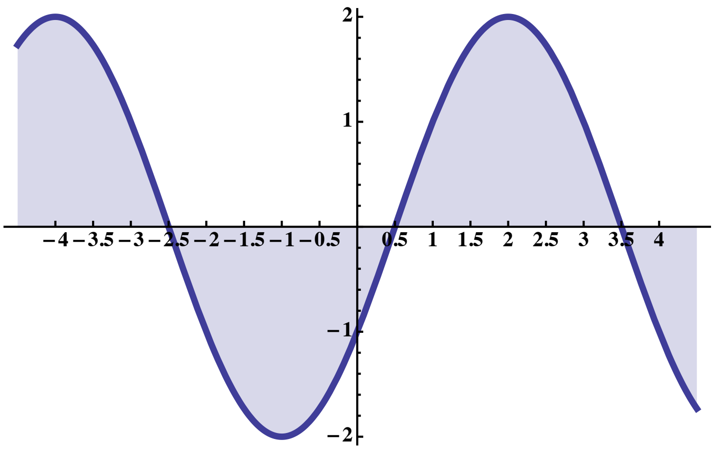
  Poglejmo še nekaj možnosti za t pri različnih izbirah k:
  $k = 0 \Rightarrow t = 4$, $k = 1 \Rightarrow t = 10$, $k = -1 \Rightarrow t = -2$, ...
  Edina rešitev ki leži na intervalu $[-3, 3]$ je $t = -2$.

1.6 Določitev parametrov harmoničnega nihanja

Določi parametre modela harmoničnega nihanja:

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

ki je podano s spodnjim grafom:



Rešitev:

Iz grafa moramo določiti amplitudo A, krožno frekvenco ω in fazni premik φ.

Amplituda je odvisna od velikosti maksimalnega in minimalnega odmika nihanja od ravnovesne lege. V našem primeru imamo maksimume velike 2 in minimume -2, kar pomeni, da je amplituda $A = 2$.

Krožna frekvenca pomeni hitrost nihanja, ki jo lahko ocenimo iz tega, kako hitro se ponavlja sinusno nihanje, kar merimo s periodo nihanja. Perioda nihanja T je v našem primeru enaka 6. Lahko jo ocenimo z razdaljo od enega maksimuma do drugega iz našega grafa. Krožna frekvenca je tako $\omega = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$. Tako smo dobili

$$f(t) = 2\sin(\frac{\pi}{3}t + \varphi)$$

Fazni premik φ pa določimo iz položaja ničel sinusnega nihanja. V našem primeru imamo ničle pri $\ldots, -2.5, 0.5, 3.5, \ldots$, iz česar lahko sklepamo, da so ničle pri $t = 0.5 + 3k, k \in \mathbb{Z}$. Po drugi strani pa vemo, da so ničle $\sin(x)$ pri $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. To pomeni, da je $\frac{\pi}{3}t + \varphi = k\pi$. Če namesto t vstavimo $t = 0.5 + 3k$, dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{3}(0.5 + 3k) + \varphi &= k\pi \\
\frac{\pi}{6} + k\pi + \varphi &= k\pi \\
\varphi &= -\frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

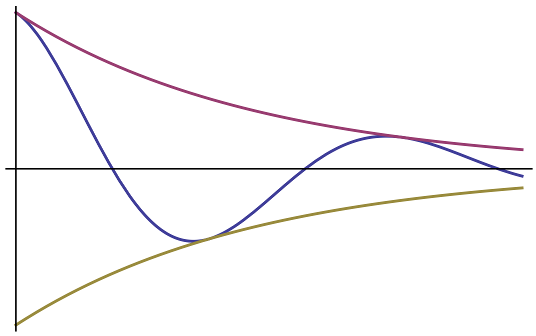
Končni model sinusnega nihanja je tako

$$f(t) = 2\sin(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{6})$$

1.7 Dušeno nihanje

Obravnavajmo model dušenega nihanja

$$f(t) = 2 \cdot e^{-0.2t} \cdot \sin(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}),$$



a) Določi ničle funkcije $f(t)$ za $t \geq 0$. (Namig: Ničle $\sin(t)$ so pri $k\pi$)

b) Določi, pri katerih vrednostih t ($t \geq 0$) so doseženi maksimumi funkcije $f(t)$. (Namig: Maksimumi $\sin(t)$ so pri $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$)

c) Določi, pri katerih vrednostih t ($t \geq 0$) so doseženi minimumu funkcije $f(t)$. (Namig: Minimumi $\sin(t)$ so pri $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$)

Rešitev:

a) Ničle $f(t)$ so odvisne samo od sinusa, ki nastopa pri dušenem nihanju. Tako iščemo ničle

$$\begin{aligned}
\sin(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}) &= 0 \\
\text{ker je } \sin(x) = 0 \quad &\text{pri} \quad x = k\pi \\
\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2} &= k\pi \quad / : \pi \\
\frac{1}{4}t + \frac{1}{2} &= k \quad / \cdot 4 \\
t + 2 &= 4k \\
t &= 4k - 2 \\
t &= 2, 6, 10, 14, \ldots
\end{aligned}$$

b) Tudi maksimumi $f(t)$ so odvisni samo od sinusa, ki nastopa pri dušenem nihanju. Tako iščemo maksimume

$$\max\left\{\sin(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2})\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ker je } \max\sin(x) & \text{pri} & x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \\ \dfrac{\pi}{4}t+\dfrac{\pi}{2} & = & \dfrac{\pi}{2}+2k\pi \quad /:\pi \\ \dfrac{1}{4}t+\dfrac{1}{2} & = & \dfrac{1}{2}+2k \quad /\cdot 4 \\ t+2 & = & 2+8k \\ t & = & 8k \\ t & = & 0,8,16,24,\ldots \end{array}$$

b) Prav tako so tudi minimumi $f(t)$ odvisni samo od sinusa, ki nastopa pri dušenem nihanju. Tako iščemo minimume

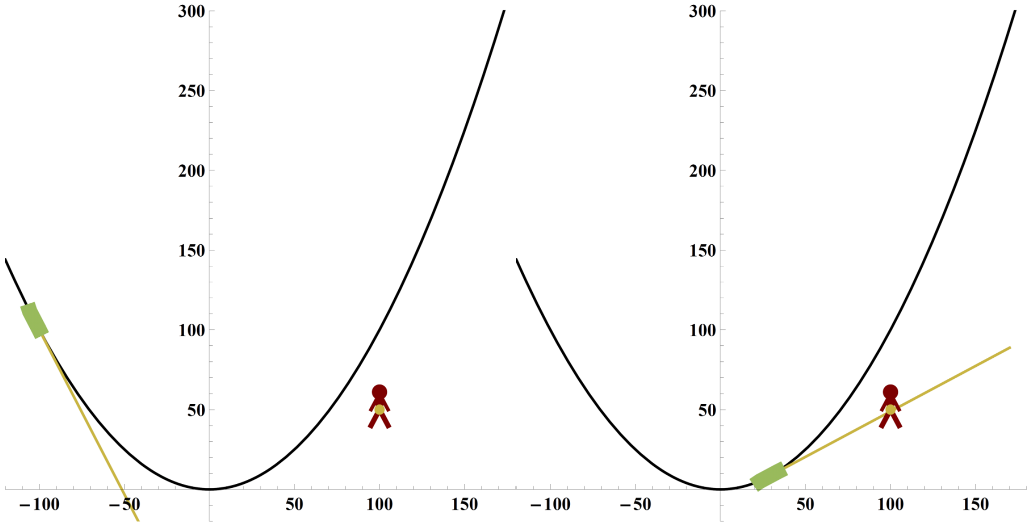
$$\min\left\{\sin(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{2})\right\}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{ker je } \min\sin(x) & \text{pri} & x=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi \\ \dfrac{\pi}{4}t+\dfrac{\pi}{2} & = & \dfrac{3\pi}{2}+2k\pi \quad /:\pi \\ \dfrac{1}{4}t+\dfrac{1}{2} & = & \dfrac{3}{2}+2k \quad /\cdot 4 \\ t+2 & = & 6+8k \\ t & = & 4+8k \\ t & = & 4,12,20,28,\ldots \end{array}$$

2 Diferencialni račun

2.1 Tangenta funkcije

Avto vozi skozi ovinek, ki je v obliki parabole $\frac{1}{100}x^2$. Pešec stoji ob cesti v točki (100,51). V kateri točki ovinka bomo z avtom osvetlili pešca?



Rešitev:

Avto bo osvetlil pešca, ko bo v točki t na paraboli $\frac{1}{100}t^2$, torej ko bo v točki $(t, \frac{1}{100}t^2)$. Za to točko pa velja, da gre tangenta v tej točki tudi skozi točko pešca $(100, 51)$, da ga avto lahko osveti z lučmi (ki svetijo naravnost). Ta dva podatka uporabimo za izračun naše rešitve.

Premico tangente funkcije $f(x)$ v dani točki $x = t$ lahko zapišemo z

$$y = k_T x + n_T, \quad \text{kjer je } k_T = f'(x)|_{x=t}$$

V našem primeru je

$$k_T = f'(x)|_{x=t} = \left.\frac{2x}{100}\right|_{x=t} = \frac{1}{50}t$$

Tako dobimo premico tangente

$$y = \frac{1}{50}t \cdot x + n_T$$

Določiti moramo še n_T. To določimo iz točke $(100, 51)$, ki leži na premici tangente:

$$\begin{aligned} 51 &= \frac{1}{50}t \cdot 100 + n_T \\ 51 &= 2t + n_T \\ n_T &= 51 - 2t \end{aligned}$$

Premica tangente je tako enaka:

$$y = \frac{1}{50}t \cdot x + (51 - 2t)$$

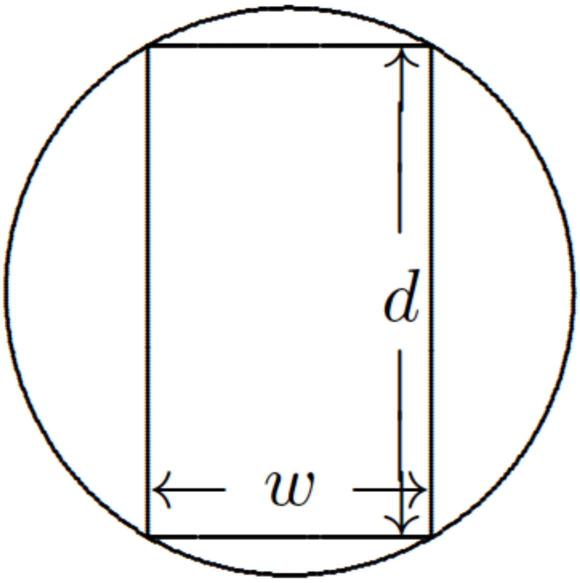
Ker pa na tej premici leži tudi točka $(t, \frac{1}{100}t^2)$, to vstavimo v enačbo premice in rešimo enačbo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{100}t^2 &= \frac{1}{50}t \cdot t + (51 - 2t) \\
\frac{1}{100}t^2 &= \frac{1}{50}t^2 - 2t + 51 \quad / \cdot 100 \\
t^2 &= 2t^2 - 200t + 5100 \\
t^2 - 200t + 5100 &= 0 \\
(t-30)(t-170) &= 0 \\
t_1 = 30, & \qquad t_2 = 170
\end{aligned}$$

Pravilna rešitev je $t_1 = 30$, ker mora biti avto pred pešcem, da ga osvetli. V tem primeru je bil avto v točki (30, 9), ko je osvetlil pešca.
Rešitev $t_2 = 170$ bi bila tudi pravilna, če bi avto prihajal z nasprotne smeri oziroma bi ga osvetlil z zadnjimi lučmi.

2.2 Praktična uporaba odvoda

Denimo, da hočemo izrezati iz okroglega papirja s polmerom r pravokotnik, ki bo imel največjo možno ploščino.
Kako dolge morajo biti stranice pravokotnika?

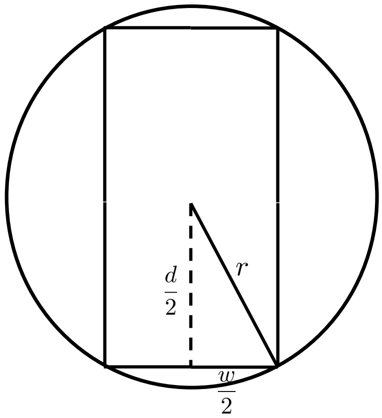


Rešitev:

Ploščina pravokotnika, ki bi ga radi izrezali iz okroglega papirja je:

$$p = w \cdot d$$

Izrazimo w z d in polmerom kroga, ki je znan in ga označimo z r. Lahko ugotovimo, da je povezava med w, d in r Pitagorov izrek:



Torej velja:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2 &= r^2 \\
\frac{d^2}{4} + \frac{w^2}{4} &= r^2 \\
w^2 &= 4r^2 - d^2 \\
w &= \sqrt{4r^2 - d^2}
\end{aligned}$$

Tako lahko ploščino pravokotnika zapišemo s:

$$p = \sqrt{4r^2 - d^2} \cdot d$$

Da dobimo maksimalno ploščino, moramo p odvjajati po spremenljivki d in odvod izenačiti z 0, da dobimo, za kateri d je ploščina maksimalna (iskanje ekstremnih točk):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial d} &= \frac{\partial}{\partial d}(\sqrt{4r^2 - d^2} \cdot d) = \\
&= \frac{1}{2}(4r^2 - d^2)^{-\frac{1}{2}}(-2d) \cdot d + \sqrt{4r^2 - d^2} \cdot 1 = 0
\end{aligned}$$

Enačbo preoblikujemo in jo rešimo za d:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4r^2 - d^2} - \frac{d^2}{\sqrt{4r^2 - d^2}} &= 0 \quad / \cdot \sqrt{4r^2 - d^2} \\
(4r^2 - d^2) - d^2 &= 0 \\
4r^2 - d^2 &= 0 \\
d^2 &= 2r^2 \\
d &= \sqrt{2}r
\end{aligned}$$

Izračunamo še w iz Pitagorove zveze:

$$\begin{aligned}
w^2 &= 4r^2 - d^2 = 4r^2 - 2r^2 = 2r^2 \\
w &= \sqrt{2}r
\end{aligned}$$

Tako lahko ugotovimo, da je pravokotnik z maksimalno ploščino, ki ga lahko izrežemo iz okroglega papirja, kvadrat s stranico $\sqrt{2}r$. Če je npr. $r = 10cm$, potem lahko izrežemo kvadrat s stranico $\sqrt{2} \cdot 10 \approx 14.1cm$, ki bo imel maksimalno ploščino.

2.3 Ekstremi funkcije

S pomočjo prvega odvoda poiščite kandidate za ekstremne točke naslednjih funkcij in nato s pomočjo odvodov ugotovite (prvega in/ali drugega), za kakšne ekstreme gre:

1. $$f(x) = (x+1)^2(x-2)^4$$

2. $$f(x) = x^2e^{-x}$$

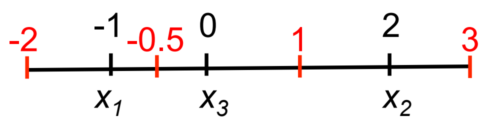
Rešitev:

Ekstremne točke funkcij poiščemo z uporabo prvega odvoda, kjer so ničle odvoda kandidati za ekstremne točke. Nato pa s pomočjo okoliških točk kandidatov za ekstrem prvega odvoda ugotovimo, za kakšen ekstrem gre.

1. Odvajajmo funkcijo $f(x) = (x+1)^2(x-2)^4$ in poiščemo ničle odvoda.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= ((x+1)^2)'(x-2)^4 + (x+1)^2((x-2)^4)' = \\
&= ((x+1)^2)'(x-2)^4 + (x+1)^2((x-2)^4)' = \\
&= 2(x+1)\cdot 1\cdot (x-2)^4 + (x+1)^2 4(x-2)^3\cdot 1 = \\
&= (x+1)(x-2)^3(2(x-2)+4(x+1)) = \\
&= (x+1)(x-2)^3(2x-4+4x+4) = \\
&= (x+1)(x-2)^3(6x) = 0
\end{aligned}$$

Ničle so pri $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ in pri $x_3 = 0$. To so kandidati za ekstremne točke. Tem točkam izberemo okoliške točke, kot so npr. prikazane na spodnji sliki in ugotovimo, za kakšne ekstreme gre:



Izračunamo predznak odvoda funkcije za:

- $x_1 = -1$:
  $f'(-2) = \ominus \cdot \ominus \cdot \ominus = \ominus$
  $f'(-0.5) = \oplus \cdot \ominus \cdot \ominus = \oplus$
  Funkcija torej na levi strani kandidata $x_1 = -1$ pada in na desni narašča, kar pomeni, da je točka x_1 minimum.

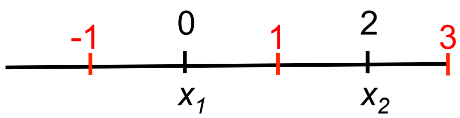
- $x_3 = 0$:
  $f'(-0.5) = \oplus \cdot \ominus \cdot \ominus = \oplus$
  $f'(1) = \oplus \cdot \ominus \cdot \oplus = \ominus$
  Funkcija torej na levi strani kandidata $x_3 = 0$ narašča in na desni pada, kar pomeni, da je točka x_3 maksimum.

- $x_2 = 2$:
  $f'(1) = \oplus \cdot \ominus \cdot \oplus = \ominus$
  $f'(3) = \oplus \cdot \oplus \cdot \oplus = \oplus$
  Funkcija torej na levi strani kandidata $x_2 = 2$ pada in na desni narašča, kar pomeni, da je točka x_2 minimum.

2. Odvajajmo funkcijo $f(x) = x^2 e^{-x}$ in poiščemo ničle odvoda.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' = \\ &= 2x e^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) = \\ &= x e^{-x}(2 - x) = 0 \end{aligned}$$

   Ničle so pri $x_1 = 0$ in pri $x_2 = 2$. To sta kandidata za ekstremni točki. Tem točkam izberemo okoliške točke, kot so npr. prikazane na spodnji sliki in ugotovimo, za kakšne ekstreme gre:



   Izračunamo predznak odvoda funkcije za:

   - $x_1 = 0$:
     $f'(-1) = \ominus \cdot \oplus \cdot \oplus = \ominus$
     $f'(1) = \oplus \cdot \oplus \cdot \oplus = \oplus$
     Funkcija torej na levi strani kandidata $x_1 = 0$ pada in na desni narašča, kar pomeni, da je točka x_1 minimum.

   - $x_2 = 2$:
     $f'(1) = \oplus \cdot \oplus \cdot \oplus = \oplus$
     $f'(3) = \oplus \cdot \oplus \cdot \ominus = \ominus$
     Funkcija torej na levi strani kandidata $x_2 = 2$ narašča in na desni pada, kar pomeni, da je točka x_2 maksimum.

Ekstremne točke lahko določimo tudi z uporabo drugega odvoda, vendar je v obeh primerih drugi odvod funkcij precej bolj kompliciran in se lahko zlahka zmotimo pri izračunu.

2.4 Parcialno odvajanje

Izračunaj parcialne odvode $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ naslednje funkcije:

$$z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$$

Rešitev:

Parcialni odvod funkcije več spremenljivk glede na eno spremenljivko je odvod te funkcije po tej spremenljivki, kjer vse ostale spremenljivke obravnavamo kot konstante.

Za izračun parcialnih odvodov $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ je potrebno najprej izračunati pracialna odvoda $\frac{\partial z}{\partial x}$ in $\frac{\partial z}{\partial y}$.

- $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}\right) = \\ &= \frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3} \end{aligned}$$

- $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}\right) = \\ &= -2\frac{x}{y^3} - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Sedaj pa lahko izračunamo parcialne odvode druge stopnje:

- $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}\right) = \\ &= -6\frac{y}{x^4} = -\frac{6y}{x^4} \end{aligned}$$

- $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}\right) = \\ &= -2\frac{1}{y^3} + 2\frac{1}{x^3} = 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right) \end{aligned}$$

- $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

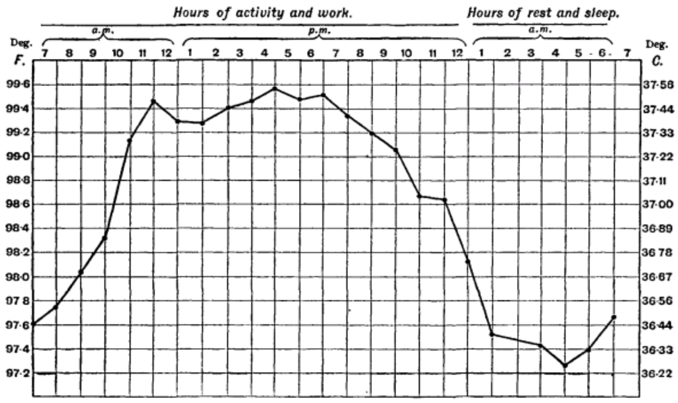
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\frac{x}{y^3} - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= -2\frac{1}{y^3} + 2\frac{1}{x^3} == 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right) \end{aligned}$$

- $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-2\frac{x}{y^3} - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= 6\frac{x}{y^4} = \frac{6x}{y^4} \end{aligned}$$

2.5 Numerično odvajanje

Imejmo graf temperature pri povprečnemu človeku:



Vir: Wikipedia

Oceni hitrost spreminjanja temperature ob 9., ob 17. in ob 22. uri.

Rešitev:

Hitrost spreminjanja temperature v danih časih izračunamo z odvodi funkcije spreminjanja temperature v teh točkah. Če označimo funkcijo spreminjanja temperature s časom s funkcijo $f(t)$, potem moramo izračunati $f'(t)|_{t=9}$, $f'(t)|_{t=17}$ in $f'(t)|_{t=22}$. Ker pa ne poznamo formulo funkcije $f(t)$, poznamo le graf, torej numerične vrednosti temperature izmerjene ob vsaki polni ur, potem moramo odvode aprkosimirati z numeričnimi približki odvoda.

Odvod funkcije $f(t)$ v točki t_0 lahko aproksimiramo z:

$$f'(t_0) \approx \frac{f(t_0+\Delta) - f(t_0-\Delta)}{2\Delta},$$

kjer Δ predstavlja enakomeren razmik od točke t_0 v levo in desno.

V našem primeru

$$\begin{aligned}
f'(9) &\approx \frac{f(10)-f(8)}{2\cdot 1} = \frac{37.11-36.61}{2} = 0.25°/h \\
f'(17) &\approx \frac{f(18)-f(16)}{2\cdot 1} = \frac{37.50-37.50}{2} = 0°/h \\
f'(22) &\approx \frac{f(23)-f(21)}{2\cdot 1} = \frac{37.05-37.25}{2} = -0.2°/h
\end{aligned}$$

Ob 9. uri spreminjanje temperature narašča s hitrostjo $0.25°/h$, ob 17. uri se temperatura ne spreminja, ob 22. uri pa temperatura pada s hitrostjo $0.2°/h$.

2.6 Prileganje premice k podatkom

Imejmo podano tabelo porabe energije pri človeku pri različnih hitrostih hoje in različnih telesnih težah.

Hitrost (km/h)		Telesna masa					
	Kg	40	50	60	70	80	90
3		1.6	2.1	2.5	3.0	3.5	3.9
4		2.3	2.8	3.3	3.7	4.2	4.7
5		3.0	3.5	4.0	4.5	4.9	5.4
6		3.8	4.2	4.7	5.2	5.7	6.1
7		4.5	4.9	5.4	5.4	6.4	6.8

Izračunaj parametre premice, ki se optimalno prilega podatkom v tabeli pri konstantni hitrosti hoje 5 km/h pri osebah različne telesne teže.

Rešitev:

Izračunajmo parametre a, b premice:

$$y = ax + b,$$

ki se prilega podatkom v spodnji tabeli:

$x =$ **m**	40	50	60	70	80	90
$y =$ **E**	3.0	3.5	4.0	4.5	4.9	5.4

Določiti moramo torej takšna a in b, da bo

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{N} (y_i - a x_i - b)^2$$

V našem primeru to pomeni:

$$\begin{aligned} \min: \quad & (3.0 - (a \cdot 40 + b))^2 + \\ & + (3.5 - (a \cdot 50 + b))^2 \\ & + (4.0 - (a \cdot 60 + b))^2 \\ & + (4.5 - (a \cdot 70 + b))^2 \\ & + (4.9 - (a \cdot 80 + b))^2 \\ & + (5.4 - (a \cdot 90 + b))^2 \end{aligned}$$

Najprej odvajajmo po parametru a in odvod izenačimo z 0:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a}: \quad & 2(3.0-(a\cdot 40+b))(-40)+ \\
& +2(3.5-(a\cdot 50+b))(-50) \\
& +2(4.0-(a\cdot 60+b))(-60) \\
& +2(4.5-(a\cdot 70+b))(-70) \\
& +2(4.9-(a\cdot 80+b))(-80) \\
& +2(5.4-(a\cdot 90+b))(-90)=0
\end{aligned}
$$

Delimo z (-2) in dobimo:

$$
\begin{aligned}
& 120-1600a-40b+ \\
& 175-2500a-50b+ \\
& 240-3600a-60b+ \\
& 315-4900a-70b+ \\
& 392-6400a-80b+ \\
& 486-8100a-90b=0
\end{aligned}
$$

Seštejemo skupaj in dobimo:

$$27100a+390b=1728$$

Da izračunamo minimum, moramo odvajati izraz še po b in odvod izenačimo z 0:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial b}: \quad & 2(3.0-(a\cdot 40+b))(-1)+ \\
& +2(3.5-(a\cdot 50+b))(-1) \\
& +2(4.0-(a\cdot 60+b))(-1) \\
& +2(4.5-(a\cdot 70+b))(-1) \\
& +2(4.9-(a\cdot 80+b))(-1) \\
& +2(5.4-(a\cdot 90+b))(-1)=0
\end{aligned}
$$

Delimo z (-2) in dobimo:

$$
\begin{aligned}
& 3.0-a\cdot 40-b+ \\
& +3.5-a\cdot 50-b \\
& +4.0-a\cdot 60-b \\
& +4.5-a\cdot 70-b \\
& +4.9-a\cdot 80-b \\
& +5.4-a\cdot 90-b=0
\end{aligned}
$$

Seštejemo skupaj in dobimo:

$$390a + 6b = 25.3$$

Tako dobimo sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama:

$$\begin{aligned}
27100a + 390b &= 1728 & & \\
390a + 6b &= 25.3 & & \text{pomnožimo s 65} \\
-----------&- & & ------------- \\
27100a + 390b &= 1728 & & \\
25350a + 390b &= 1644.5 & & \text{odštejemo} \\
-----------&- & & ------------- \\
1750a &= 83.5 & & \rightarrow a = 83.5/1750 = 0.048 \\
-----------&- & & ------------- \\
390(0.048) + 6b &= 25.3 & & \text{vstavimo } a \text{ v drugo enačbo} \\
-----------&- & & ------------- \\
6b &= 25.3 - 18.72 & & \\
b &= 6.58/6 = 1.12 & &
\end{aligned}$$

Enačba premice, ki se prilega danim podatkom, je tako

$$y = 0.048x + 1.12$$

3 Integralni račun

3.1 Uporaba integralov pri reševanju osnovnih diferencialnih enačb

Razpolovna doba v biologiji in farmakologiji

Biološka razpolovna doba ali razpolovni čas izločanja je čas, potreben za snovi (zdravila, droge, radioaktivne snovi ali druge), da izgubijo polovico svoje farmakološke, fiziološke ali radiološke aktivnosti.

Matematični model razpadanja snovi lahko predstavimo s preprosto diferencialno enačbo. Če označimo maso snovi z $m(t)$ v času t, potem je stopnja razpada $\frac{dm}{dt}$ proporcionalna masi:

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

kjer z minusom označujemo zmanjševanje mase.

1. Določi, kako se masa snovi spreminja s časom. Določi $m(t)$.
2. Reši naslednjo nalogo: Radioaktivni izotop ima na začetku maso 200 mg, ki čez dve leti pade za 50 mg. Določi, kako se spreminja količina izotopa skozi čas in določi razpolovno dobo izotopa.

Rešitev:

1. Potrebno je rešiti diferencialno enačbo, ki je podana z osnovno zvezo:

   $$\frac{dm}{dt} = -km$$

   V ta namen preoblikujemo zgornjo enačbo tako, da ločimo količine med sabo in integriramo obe strani enačbe:

   $$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= -km \\ \frac{dm}{m} &= -kdt \qquad \text{integriramo obe strani enačbe} \\ \int \frac{dm}{m} &= \int -kdt \\ ln(m) &= -kt + C \\ m(t) &= e^{-kt+C} = Ae^{-kt}, \quad A = e^C \end{aligned}$$

2. Z dodatnimi podatki lahko določimo proste konstante v prejšnji zvezi in določimo razpolovno dobo elementa iz druge naloge. Torej: $m(t) = Ae^{-kt}$, pri $t = 0$ je $m(0) = 200$ in pri $t = 2$ je $m(2) = 200 - 50 = 150$. Iz tega izračunamo konstanto A:

   $$200 = Ae^{-k\cdot 0} = A \cdot 1 \Rightarrow A = 200.$$

Potem pa še izračunamo koeficient razpolovne dobe k:

$$
\begin{aligned}
m(2) = 150 &= 200e^{-k\cdot 2}\\
\frac{150}{200} &= e^{-2k}\\
ln\frac{3}{4} &= -2k\\
k &= -0.288/(-2) = 0.144
\end{aligned}
$$

3.2 Uporaba integralov pri reševanju osnovnih diferencialnih enačb

Forenzična analiza

Čas smrti lahko določimo z merjenjem temperature umrle osebe. Denimo, da je v prostoru, kjer je oseba umrla, temperatura T_s. Po Newtonovem zakonu ohlajanja telo oddaja toploto v prostor in izgublja temperaturo s hitrostjo, ki je proporcionalna razliki temperature telesa in temperature sobe. To lahko zapišemo z naslednjo diferencialno zvezo:

$$\frac{dT_b}{dt} = k(T_b(t) - T_s),$$

kjer je T_b temperatura telesa, ki se spreminja s časom t in T_s temperatura sobe.

1. Denimo, da je v prostoru, kjer je oseba umrla, temperatura $T_s = 21°C$ in da predpostavimo, da je bila temperatura umrle osebe 37°C. Izračunaj, kdaj je oseba umrla.

Rešitev:

Da bomo lahko izračunali zvezo spreminjanja temperature telesa glede na čas, moramo najprej rešiti diferencialno enačbo:

$$\begin{aligned}\frac{dT_b}{dt} &= k(T_b - T_s)\\ \frac{dT_b}{T_b - T_s} &= kdt\\ \frac{dT_b}{T_b - 21} &= kdt\end{aligned}$$

Integrirajmo vsako stran enačbe ločeno:

$$\begin{aligned}\int \frac{dT_b}{T_b - 21} &= \int \frac{dx}{x} = \ln(x) = \ln(Tb - 21)\\ & T - 21 = x\\ & dT = dx\end{aligned}$$

Še druga stran:

$$\int kdt = kt + C$$

Tako dobimo:

$$\begin{aligned}\ln(Tb - 21) &= kt + C\\ Tb - 21 &= e^{kt+C} = Ae^{kt}, A = e^C\\ Tb &= Ae^{kt} + 21\end{aligned}$$

Izračunajmo prost konstante naše zveze iz dodatnih podatkov, ki jih lahko predvidimo. Denimo, da smo prišli na kraj smrti ob 19.00 in izmerili temperaturo umrle osebe, ki je znašala $Tb = 35°C$. Tako lahko določimo konstanto A iz temperature $Tb = 35°C$ ob času 0:

$$Tb(0) = 35 = Ae^{k\cdot 0} + 21 = A \cdot 1 + 21 \Rightarrow A = 14$$

Denimo, da zmerimo še temperaturo umrle osebe po 90 minutah in ugotovimo, da je $Tb(90) = 32°C$. Iz tega lahko še izračunamo koeficient spreminjanja temperature:

$$\begin{aligned} Tb(90) = 32 &= 14e^{k\cdot 90} + 21 \\ 32 - 21 &= 14e^{k\cdot 90} \\ \frac{11}{14} &= e^{k\cdot 90} \\ \ln\frac{11}{14} &= 90k \\ k &= \frac{1}{90}\ln\frac{11}{14} = -0.0027 \end{aligned}$$

Tako smo dobili zvezo ohlajanja telesa v odvisnosti od časa:

$$Tb(t) = 14e^{-0.0027t} + 21$$

Če predpostavimo, da je bila temperatura umrlega ob smrti $37°C$, potem lahko izračunamo čas njegove smrti:

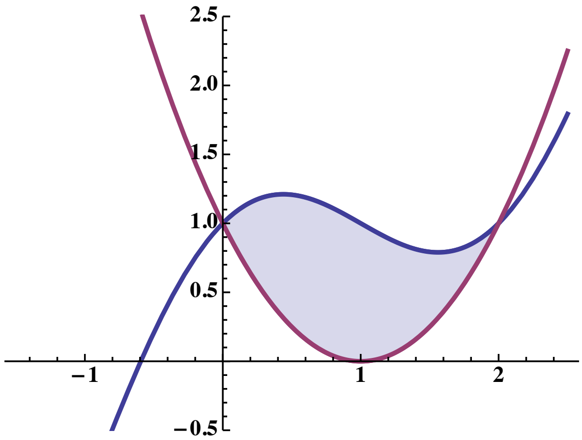
$$\begin{aligned} 37 &= 14e^{-0.0027t} + 21 \\ \frac{16}{14} &= e^{-0.0027t} \\ \ln\frac{16}{14} &= -0.0027t \\ t &= \frac{\ln\frac{16}{14}}{-0.0027} = -49.46 \end{aligned}$$

Čas smrti je torej nastopil pribl. 50 minut preden smo prvič izmerili temperaturo umrlega, torej smrt je nastopila ob 18:10.

3.3 Izračun ploščine

Izračunajte ploščino lika, ki ga oklepata funkciji

$$f(x) = x + \cos(\tfrac{\pi}{2}x) \text{ in } g(x) = (x-1)^2.$$



Rešitev:

Graf funkcije $f(x)$ je prikazan z modro krivuljo, graf funkcije $g(x)$ pa z rdečo krivuljo. Če hočemo izračunati ploščino, ki je prikazana na sliki, moramo izračunati ploščino p_1 med krivuljo funkcije $f(x)$ in abscisno osjo ter ploščino p_2 med krivuljo $g(x)$ in abscisno osjo med točkama presečišč med obema krivuljama. Potem pa moramo ti dve ploščini odšteti, torej izračunati p_1 - p_2.

Presečišča med krivuljama lahko ocenimo iz grafa. Lahko vidimo, da je ena točka presečišča pri $x = 0$, druga pa pri $x = 2$. To lahko tudi preverimo, tako da za obe točki izračunamo $f(0)$ in $g(0)$ ter $f(2)$ in $g(2)$, pri čemer mora veljati $f(0) = g(0)$ in $f(2) = g(2)$.

Izračun ploščine p_1:

$$p_1 = \int_0^2 (x + \cos(\frac{\pi}{2}x))dx = \int_0^2 xdx + \int_0^2 \cos(\frac{\pi}{2}x)dx$$

Izračunajmo vsak integral posebej:

$$\int xdx = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\int \cos(\frac{\pi}{2}x)dx &= \frac{2}{\pi}\int \cos tdt = \frac{2}{\pi}\sin t = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x \\ & \frac{\pi}{2}x = t \\ & \frac{\pi}{2}dx = dt, \rightarrow dx = \frac{2}{\pi}dt\end{aligned}$$

Dokončajmo izračun ploščine p_1:

$$p_1 = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 - \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\bigg|_0^2 = (2-0) + (\frac{2}{\pi}\sin\pi - \frac{2}{\pi}\sin 0) = 2 + (0-0) = 2$$

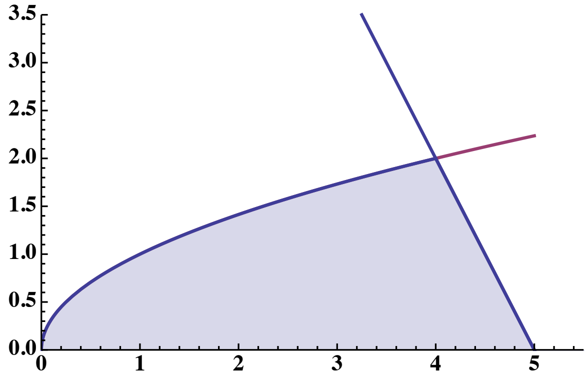
Izračunajmo še ploščino p_2:

$$p_2 = \int_0^2 (x-1)^2 dx = \int_0^2 (x^2 - 2x + 1) dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 - 2\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + x|_0^2 = \frac{8}{3} - (4) + 2 = \frac{2}{3}$$

Ploščina preseka med krivuljama je tako enaka $p_1 - p_2 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

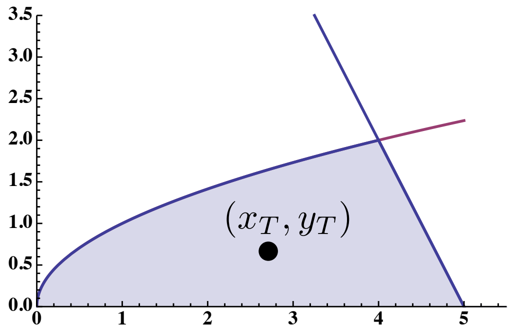
3.4 Izračun težišča

Določi težišče lika, ki ga omejujejo abscisna os ter grafa funkcij $f(x) = -2x + 10$ ter $g(x) = \sqrt{x}$ in je prikazan na spodnji sliki



Rešitev:

Težišče lika, ki ga omejujeta krivulji $f(x)$ in $g(x)$ z abscisno osjo je prikazano na sliki:



Najprej definirajmo skupno funkcijo, ki je sestavljena iz obeh funkcij, ki omejujeta lik.

$$h(x) = \begin{cases} g(x) = \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 4 \\ f(x) = -2x + 10, & 4 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{drugje} \end{cases}$$

Da izračunamo koordinati težišča (x_T, y_T) izračunamo najprej ploščino S lika pod krivuljo funkcije $h(x)$ na intervalu $(0, 5)$ z določenim integralom $S = \int_0^5 h(x)dx$, nato pa izračunamo koordinate težišča po naslednjem obrazcu:

$$x_T = \frac{\int_0^5 x h(x) dx}{S}, \qquad y_T = \frac{\frac{1}{2}\int_0^5 h^2(x) dx}{S}.$$

Izračun ploščine S:

$$\begin{aligned} S = \int_0^5 h(x)dx &= \int_0^4 \sqrt{x}dx + \int_4^5 (-2x+10)dx = \\ &= \left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^4 + (-x^2+10x)\Big|_4^5 = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{4^3} + (-25+50-(-16+40)) = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{64} + (25-24) = \\ &= \frac{16}{3} + 1 = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

Izračun integrala $\int_0^5 xh(x)dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^5 xh(x)dx &= \int_0^4 x\sqrt{x}dx + \int_4^5 x(-2x+10)dx = \\ &= \int_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx + \int_4^5 (-2x^2+10x)dx = \\ &= \left.\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^4 + (-\frac{2}{3}x^3 + \frac{10}{2}x^2)\Big|_4^5 = \\ &= \frac{2}{5}\sqrt{4^5} + (-\frac{2}{3}125 + \frac{250}{2} - (-\frac{2}{3}64 + \frac{160}{2})) = \\ &= \ldots = \\ &= \frac{64}{5} - \frac{13}{3} = \frac{257}{15} = 17.13 \end{aligned}$$

Koordinata x_T točke težišča je:

$$x_T = \frac{\int_0^5 xh(x)dx}{S} = \frac{\frac{257}{15}}{\frac{19}{3}} = 2.70474$$

Izračun integrala $\int_0^5 h^2(x)dx$:

$$\begin{aligned} \int_0^5 h^2(x)dx &= \int_0^4 (\sqrt{x})^2dx + \int_4^5 (-2x+10)^2dx = \\ &= \int_0^4 xdx + \int_4^5 (4x^2-40x+100)^2dx = \\ &= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 + (\frac{4}{3}x^3 - \frac{40}{2}x^2 + 100x)\Big|_4^5 = \\ &= \ldots \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Koordinata y_T točke težišča je:

$$y_T = \frac{\frac{1}{2}\int_0^5 h^2(x)dx}{S} = \frac{\frac{1}{2}\frac{20}{3}}{\frac{19}{3}} = \frac{10}{19} = 0.52632$$

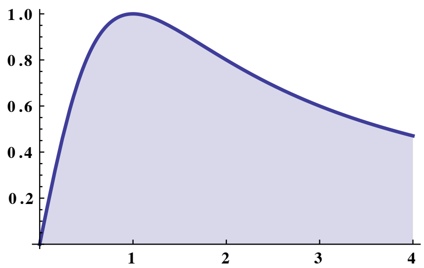
Težišče lika je tako v točki

$$(2.705, 0.526)$$

3.5 Numerično računanje določenih integralov

Izračunaj integral

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+1}dx$$



1. analitično
2. in numerično po pravokotnem, trapeznem in Simpsonovem pravilu s podintervali dolžine 1.
3. Rešitve primerjaj med seboj.

Rešitev:

1. Najprej rešimo integral analitično, da dobimo dejansko vrednost integrala.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{x^2+1}dx &= \int \frac{dt}{t} = \ln(t) = \ln(x^2+1) \\
& \quad x^2+1 = t \\
& \quad 2xdx = dt \\
\int_0^4 \frac{2x}{x^2+1}dx &= \ln(x^2+1)\Big|_0^4 = \ln(17) - \ln(1) = \ln(17) = 2.83321
\end{aligned}$$

2. Pravokotno pravilo s štirimi podintervali:
   Dolžina podintervala je $\Delta = \frac{4-0}{4} = 1$. Višina pravokotnika v i-tem podintervalu je $f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})$, v našem primeru je potrebno izračunati višine $f(0.5)$, $f(1.5)$, $f(2.5)$, $f(3.5)$. Tako je numerični približek našega integrala enak:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 f(x)dx &\approx \Delta \cdot f(0.5) + \Delta \cdot f(1.5) + \Delta \cdot f(2.5) + \Delta \cdot f(3.5) \\
&= \Delta \cdot (f(0.5) + f(1.5) + f(2.5) + f(3.5)) = 2.94103
\end{aligned}$$

   Trapezno pravilo:
   Pri trapeznem pravilu ploščine na podintervalih računamo kot trapeze z oglišči v točkah x_i, x_{i+1} in $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ z višino, ki je enaka dolžini podintervala Δ. Ploščina trapeza v

i-tem podintervalu je enaka $\Delta \cdot \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}$. V našem primeru imamo 4 podintervale, zato je aproksimacija integrala enaka vsoti ploščin 4-ih trapezov:

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)dx &\approx \Delta \cdot \frac{f(0)+f(1)}{2} + \Delta \cdot \frac{f(1)+f(2)}{2} + \Delta \cdot \frac{f(2)+f(3)}{2} + \Delta \cdot \frac{f(3)+f(4)}{2} \\ &= \frac{\Delta}{2} \cdot (f(0)+2f(1)+2f(2)+2f(3)+f(4)) = 2.6353\end{aligned}$$

Simpsonovo pravilo:
Pri Simpsonovem pravilu ploščine na podintervalih aproksimiramo s prileganjem kvadratnih funkcij na krivuljo in dobimo naslednje pravilo:

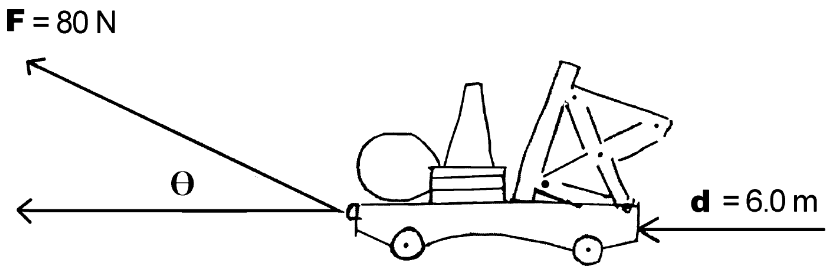
$$\int_0^4 f(x)dx \approx \frac{\Delta}{3} \cdot (f(0)+4f(1)+2f(2)+4f(3)+f(4)) = 2.8236$$

3. Numerične rešitve integrala so pokazale, da je najboljša aproksimacija integrala s štirimi podintervali bila izračunana po Simposnovem pravilu, slabša po pravokotnem pravilu, trapezno pravilo pa je bilo najslabše predvsem zaradi slabe aproksimacije na podintervalu [0,1].

4 Vektorska algebra

4.1 Uporaba razstavljanja sil

Izračunaj, koliko dela opravimo, če vlečemo voziček s silo 80 N pod kotom $\theta = 30^o$ glede na podlago na razdalji 6 m.

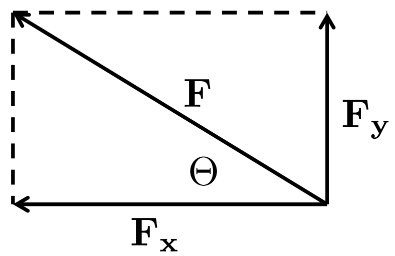


Rešitev:

Delo izračunamo kot produkt sile na opravljeni poti. V našem primeru naredimo pot v smeri osi x. Na tej poti deluje konstantno komponenta naše vlečne sile $\mathbf{F}$, ki deluje v x smeri, $\mathbf{F_x}$. Komponenta sile $\mathbf{F_y}$ v y smeri ne prispeva nič k delu, ki ga opravimo na naši poti. Tako opravimo delo

$$A = \mathbf{F_x} \cdot \mathbf{d}$$

Zato je potrebno vlečno silo $\mathbf{F}$ razstaviti na komponente po x in y smeri:



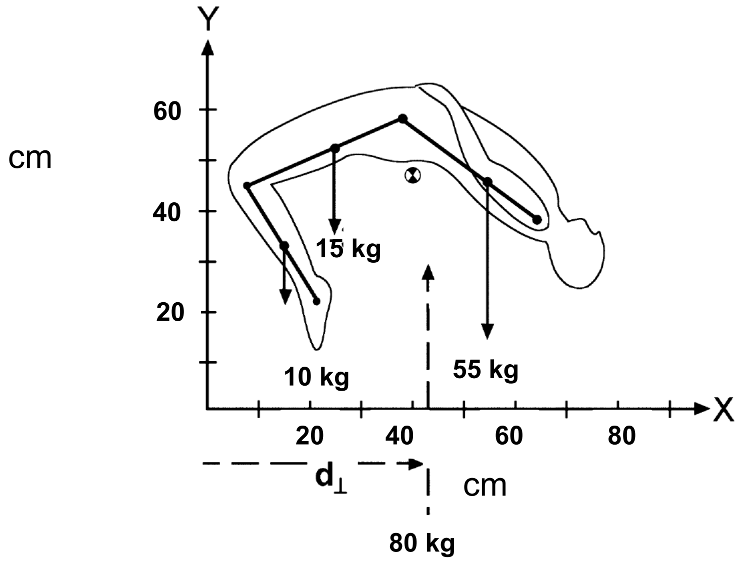
$$\mathbf{F_x} = \mathbf{F} \cdot \cos\Theta, \qquad \mathbf{F_y} = \mathbf{F} \cdot \sin\Theta$$

Opravljeno delo v našem primeru je tako:

$$A = \mathbf{F} \cdot \cos\Theta \cdot \mathbf{d} = 80N \cdot \cos 30^\circ \cdot 6m = 80N \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6m = 416Nm$$

4.2 Izračun težišča

Izračunaj s pomočjo navora točko težišča pri skakalcu v višino.



Rešitev:

To je primer določitve težišča pri človeku z uporabo t.i. segmentne metode, ko dele človeškega telesa obravnavamo po segmentih, kjer vsak segment predstavlja samostojen objekt v celotnem sistemu. Težišče bomo računali s pomočjo navora.

V tem primeru obravnavamo našega skakalca kot sistem segmentov, ki so v ravnovesju. Če je sistem v ravnovesju, potem velja, da je vsota sil v tem sistemu enaka 0 in vsota navorov prav tako enaka 0. Za reševanje takega sistema obravnavamo sile in navore v x in y smeri ločeno.

Velja $\sum \mathbf{F} = 0$:

V tem primeru imamo samo sile v y smeri. Imamo sile, ki v težišču vsakega segmenta delujejo navpično navzdol, in silo F_N, ki deluje v točki težišča skakalca navpično navzgor. Torej:

$$F_1 + F_2 + F_3 - F_N = 0$$

ali

$$F_N = F_1 + F_2 + F_3 = 10 \cdot g + 15 \cdot g + 55 \cdot g = 80 \cdot g$$

Velja $\sum \mathbf{M} = 0$:

V tem primeru imamo tudi navore (v smeri z) zaradi prispevkov sil v y smeri. Za izhodišče ročic navorov izberemo točko $(0,0)$ našega koordinatnega sistema skakalca. Tako velja:

$$F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 - F_N \cdot d_T = 0,$$

kjer so d_1, d_2 in d_3 ročice v smeri x od koordinatnega izhodišča in d_T ročica od koordinatnega izhodišča do točke težišča skakalca prav tako v x smeri. Ker je sila F_N ravno nasprotna ostalim silam, je tudi navor zaradi te sile nasprotno usmerjen od navorov ostalih sil. Če vstavimo podatke v zgornjo zvezo (ročice segmentov ocenimo iz slike skakalca), dobimo:

$$10g \cdot 15cm + 15g \cdot 25cm + 55g \cdot 55cm - 80g \cdot d_T = 0$$

$$3450g \cdot cm = 80g \cdot d_T$$

$$d_T = \frac{3550g \cdot cm}{80g} = 44.375cm$$

Točka težišča skakalca je torej v smeri x oddaljena 44.375 cm od koordinatnega izhodišča.

Univerza *v Ljubljani*
Zdravstvena fakulteta

2016